

# パラメトリック下方変換によって発生する もつれ合い光子対の空間モード対振幅の計算

発表者：1610128 大隅 廉 指導教員：宮本 洋子

## 1 はじめに

本研究の目的は、パラメトリック下方変換によって発生するもつれ合い光子対の量子状態について、空間モード展開の形で明らかにすることである。光子対の状態を各光子の空間モードの対で展開し、展開係数である空間モード対振幅を数値的に求める。非線形結晶 ( $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub> 等) によるパラメトリック下方変換において、軌道角運動量もつれ合い状態の光子対が発生することが知られている。この光子対に対してホログラムシフト法による相関測定を行うと、高次の方位角モードに起因すると考えられる非調和な振る舞いが現れる。本研究ではこれまで、非調和な振る舞いが顕著となる実験条件について、シミュレーションによって検討してきたが、そのときの光子対が具体的にどのような空間モードの対で現れるかは明確でなかった。本研究では Mathematica を用いた数値計算によって、各光子対の状態がどのような空間モードの組で表されるか方位角モード指数および動径モード指数について明らかにする。

## 2 同時計数確率

軌道角運動量もつれ合い光子対は BBO( $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub>) 結晶においてパラメトリック下方変換 (SPDC) により発生する。ポンプ光はレンズ L<sub>P</sub> によってビーム半径  $w_P$  で BBO 結晶面上に集光されている。BBO 結晶が  $z = 0$  にあり、十分に薄いと仮定できる場合、ポンプ光が LG<sub>00</sub> モードにあるときの二光子状態は以下のように書ける。

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p,p'=0}^{\infty} C_{p,p'}^n |n, p'(w_0, 0)\rangle_I | -n, p(w_0, 0)\rangle_S \quad (1)$$

ただし  $b = 1.42$  ここで  $|n, p(w_0, 0)\rangle$  はビーム径パラメター  $w_0$ 、ビームウェスト位置  $z = 0$  の方位角モード指数  $n$ 、動径モード指数  $p$  のラゲールガウスモードに 1 光子が存在する状態であり、添字  $I, S$  はそれぞれシグナル光とアイドラ光を表す。また、空間モード対振幅  $C_{p,p'}^n$  は  $z = 0$  平面内の極座標  $\mathbf{r} = (\rho, \phi)$  を用いて以下のように書ける。

$$C_{p,p'}^n = \langle I | n, p'(w_0, 0)\rangle_S \langle -n, p(w_0, 0) | \Psi \rangle_{\mathbf{r}} \quad (2)$$

$$= \int_0^{\infty} \rho_I d\rho_I \int_0^{\infty} \rho_S d\rho_S \int_0^{2\pi} d\varphi_I \int_0^{2\pi} d\varphi_S \text{LG}_{p',n}^*(\mathbf{r}_I) \text{LG}_{p,-n}^*(\mathbf{r}_S) \Phi(\mathbf{r}_I, \mathbf{r}_S) \quad (3)$$

$\Phi$  は励起光および結晶のパラメターによって定まるモード関数である [1]。同時計数確率  $P_{p,p'}^n$  とは、シグナルモード方位角モード指数  $(-n, p)$  の 1 つの光子とアイドラモード  $(n, p')$  の 1 つの光子を検出器で検出する確率のことであり、振幅  $C_{p,p'}^n$  を用いて以下のように書くことができる。

$$P_{p,p'}^n = |C_{p,p'}^n|^2 \quad (4)$$

しかし、 $P_{p,p'}^n = |C_{p,p'}^n|^2$  を確率とするには、以下の 2 式が成り立っている必要がある。

$$\int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi |\text{LG}_{p,\pm n}|^2 = 1 \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} d\rho_I \int_0^{2\pi} d\varphi_I \int_0^{\infty} d\rho_S \int_0^{2\pi} d\varphi_S |\Phi(\mathbf{r}_I, \mathbf{r}_S)|^2 = 1 \quad (6)$$

### 3 もつれ合い光子対の状態の計算方法

数式処理システム Mathematica を用いて式 (3) を以下の手順で計算をし、

1. 計算を行う際に用いた各パラメーターを以下のように設定した。  
励起光波長  $\lambda_P = 405\text{nm}$   
励起光ビーム径  $w_P = 100\mu\text{m}$   
 $w_0 = w_P/2 = 50\mu\text{m}$   
結晶長  $L = 3\text{mm}$
  2. 長さを無次元化するスケールを  $1\mu\text{m}$  に設定した。
  3. 式 (3) を極座標形式で記述し、振幅  $C_{p,p'}^n$  を出力する関数を設定した。
  4. モード関数における規格化定数  $N_r$  を計算した。Mathematica で計算しようとしたところ、計算が複雑であり、Mathematica では処理することができなかつたため、手計算で行った。また、式 (5) を Mathematica によって計算し、条件が成り立っていることを確認した。
  5. 手順 3 で設定した関数を Mathematica に入力し実行したところ、収束が遅いことによるエラーが出たため、変数変換して積分を 2 つ減らした。
  6. 手順 4 で設定した関数を Mathematica に入力し実行した。
  7. 方位角モード指数  $n$  と動径モード指数  $p, p'$  の組み合わせを変え、計算を実行した。方位角モード指数  $n$ 、と動径モード指数  $p, p'$  が高次のときは桁数の精度を下げて (6 桁以下) 計算を行った。
  8. 方位角モード指数  $n$  と振幅  $C_{p,p'}^n$ 、同時計数確率  $P_{p,p'}^n$  の関係を調べた。
- 手順 4 における規格化定数  $N_r$  の導出について  
規格化定数  $N_r$  を導出する。式 (6)[1] の左辺を  $A$  とおくと、

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \rho_I d\rho_I \int_0^{2\pi} d\varphi_I \int_0^\infty \rho_S d\rho_S \int_0^{2\pi} d\varphi_S |\Phi(\mathbf{r}_I, \mathbf{r}_S)|^2 \\ &= N_r^2 \int_0^\infty \rho_I d\rho_I \int_0^{2\pi} d\varphi_I \int_0^\infty \rho_S d\rho_S \int_0^{2\pi} d\varphi_S e^{-\frac{(\mathbf{r}_I + \mathbf{r}_S)^2}{2w_P^2}} e^{-\frac{(\mathbf{r}_I - \mathbf{r}_S)^2}{2b^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

$$A = N_r^2 \int_{-\infty}^\infty dx_I \int_{-\infty}^\infty dy_I \int_{-\infty}^\infty dx_S \int_{-\infty}^\infty dy_S e^{-\frac{(x_I + x_S)^2 + (y_I + y_S)^2}{2w_P^2}} e^{-\frac{(x_I - x_S)^2 + (y_I - y_S)^2}{2b^2}} \quad (8)$$

ただし  $b = 1.42\sqrt{L\lambda_P}/8\omega$  である。

ここで、 $x_1 = \frac{x_I + x_S}{\sqrt{2}}$ ,  $x_2 = \frac{x_I - x_S}{\sqrt{2}}$ ,  $y_1 = \frac{y_I + y_S}{\sqrt{2}}$ ,  $y_2 = \frac{y_I - y_S}{\sqrt{2}}$  と置く。すると、

$$\begin{aligned} A &= N_r^2 \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x_1^2}{w_P^2}} dx_1 \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y_1^2}{b^2}} dy_1 \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x_2^2}{w_P^2}} dx_2 \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y_2^2}{b^2}} dy_2 \\ &= N_r^2 w_P^2 b^2 \pi^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$N_r^2 w_P^2 b^2 \pi^2 = 1$  より、 $N_r \approx 0.03234$  と導いた。

- 手順5における式(2)における変数変換について式(2)を変数変換によって整理する。

$$\begin{aligned}
C_{p,p'}^n &= \int_0^\infty \rho_I d\rho_I \int_0^\infty \rho_S d\rho_S \int_0^{2\pi} d\varphi_I \int_0^{2\pi} d\varphi_S \text{LG}_{p',n}^*(\mathbf{r}_I) \text{LG}_{p,-n}^*(\mathbf{r}_S) \Phi(\mathbf{r}_I, \mathbf{r}_S) \\
&= \int_0^\infty \rho_I d\rho_I \int_0^\infty \rho_S d\rho_S \int_0^{2\pi} d\varphi_I \int_0^{2\pi} d\varphi_S \sqrt{\frac{2p!}{\pi(|n|+p)!} \frac{1}{w_0}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho_I}{w_0}\right)^{|n|} \\
&\quad \times L_{p'}^{|n|} e^{\frac{-\rho_I^2}{w_0^2} + in\varphi_I} \sqrt{\frac{2p!}{\pi(|-n|+p)!} \frac{1}{w_0}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho_S}{w_0}\right)^{|-n|} L_p^{|-n|} e^{\frac{-\rho_S^2}{w_0^2} - in\varphi_S} \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{4w_P^2}(\rho_I^2 + \rho_S^2 + 2\rho_I\rho_S \cos(\varphi_I - \varphi_S))} e^{-\frac{1}{4b^2}(\rho_I^2 + \rho_S^2 - 2\rho_I\rho_S \cos(\varphi_I - \varphi_S))} \\
&= \frac{2N_r}{\pi w_0^2} \int_0^\infty \rho_I d\rho_I \int_0^\infty \rho_S d\rho_S \int_0^{2\pi} d\varphi_I \int_0^{2\pi} d\varphi_S \sqrt{\frac{p!}{(|n|+p)!}} \sqrt{\frac{p!}{(|-n|+p)!}} \\
&\quad \times \left(\frac{\sqrt{2}\rho_I}{w_0}\right)^{|n|} \left(\frac{\sqrt{2}\rho_S}{w_0}\right)^{|-n|} L_{p'}^{|n|} L_p^{|-n|} \\
&\quad \times e^{-(\rho_I^2 + \rho_S^2)\left(\frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{4w_P^2} + \frac{1}{4b^2}\right)} e^{2\rho_I\rho_S\left(\frac{1}{4b^2} - \frac{1}{4w_P^2}\right)\cos(\varphi_I - \varphi_S) - in(\varphi_I - \varphi_S)}
\end{aligned} \tag{10}$$

ここで、 $\alpha = \frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{4w_P^2} + \frac{1}{4b^2}$ ,  $\beta = \frac{1}{4b^2} - \frac{1}{4w_P^2}$  と置く。

$\varphi_I \rightarrow \varphi_S$  の順に積分すると想定し、 $\varphi_I$  の積分 ( $\int_0^{2\pi} e^{2\rho_I\rho_S\beta \cos(\varphi_I - \varphi_S)} d\varphi_I$ ) について考える。 $\varphi_I$  の積分範囲は  $0 \rightarrow 2\pi$  である。 $\varphi_I$  の積分について考えたとき、 $\varphi_S$  は定数であるので、 $\varphi_I - \varphi_S$  の範囲も  $0 \rightarrow 2\pi$  と考えることができる。 $\varphi = \varphi_I - \varphi_S$  と置くと、 $\int_0^{2\pi} e^{2\rho_I\rho_S\beta \cos\varphi - in\varphi} d\varphi$  は  $\varphi_S$  によらないので、 $\varphi_S$  について先に積分することができる。さらに  $\varphi$  の積分について第一種変形 Bessel 関数  $I_n(z) = \int_0^\pi e^{z\cos\theta} \cos(n\theta) d\theta$  [2] を用いて、以下のように変形し、Mathematica に入力した。

$$\begin{aligned}
C_{p,p'}^n &= \frac{8\pi N_r}{w_0^2} \int_0^\infty \rho_I d\rho_I \int_0^\infty \rho_S d\rho_S \sqrt{\frac{p!}{(|n|+p)!}} \sqrt{\frac{p!}{(|-n|+p)!}} \\
&\quad \times \left(\frac{\sqrt{2}\rho_I}{w_0}\right)^{|n|} \left(\frac{\sqrt{2}\rho_S}{w_0}\right)^{|-n|} L_{p'}^{|n|} L_p^{|-n|} e^{-\alpha(\rho_I^2 + \rho_S^2)} I_n(z)
\end{aligned} \tag{11}$$

#### 4 計算結果と考察

方位角モード指数  $n = -10 \sim 10$ 、動径モード指数  $p, p' = 0 \sim 10$  の範囲から 449 個の空間モード対振幅を求めた。ただし、計算が収束しなかったモードは含めていない。 $n = 0$  のときのシグナル方向の動径モード指数  $p$  と同時計数確率の関係を表したグラフを図1(左から  $p' = 0, 1, 2$ ) に示す。 $p' = 0, 1, 2$  のとき、シグナル光とアイドラ光の動径モード指数が同じ時の同時計数確率が上がっていることがわかった。また、 $p'$  が大きくなるにつれて同時計数確率が一番高い点が低くなっていくことがわかった。

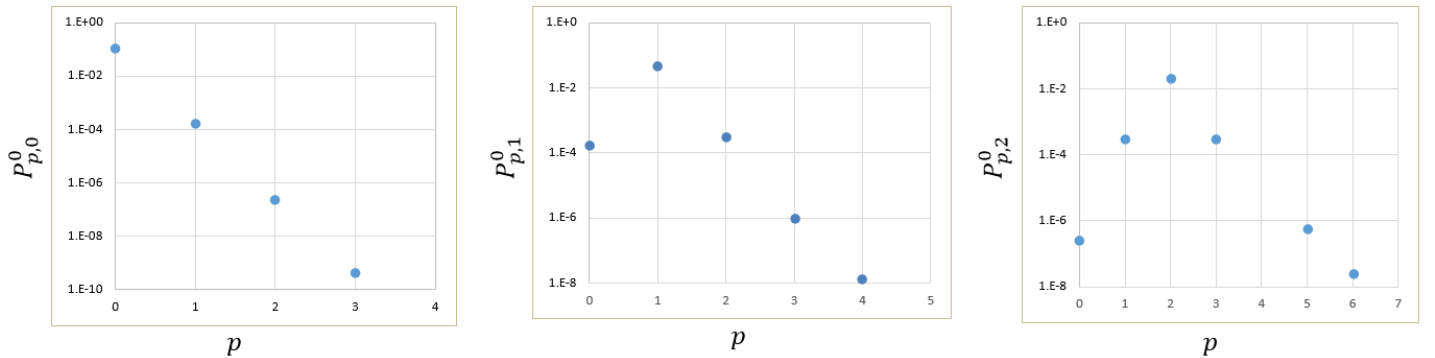


図 1: シグナル方向の動径モード指数と同時計数確率の関係

シミュレーションによって方位角モード指数  $n$  と振幅  $C_{p,p'}^n$ 、同時計数確率  $P_{p,p'}^n$  の関係を調べた。図 2 に、横軸を方位角モード指数  $n$ 、縦軸を  $\sum_{p,p'=0}^{10} P_{p,p'}^n (= \sum_{p,p'=0}^{10} |C_{p,p'}^n|^2)$  としたグラフを示す。

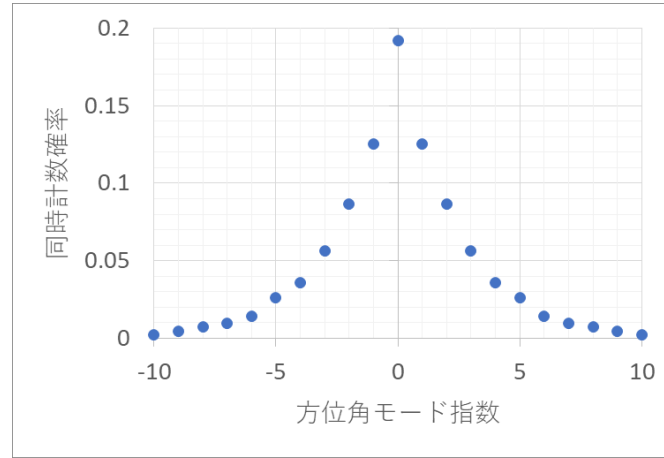


図 2: シミュレーション結果

$\sum_{p,p'=0}^{10} P_{p,p'}^n (= \sum_{p,p'=0}^{10} |C_{p,p'}^n|^2)$  を計算したところ、 $\sum_{p,p'=0}^{10} P_{p,p'}^n = 0.928478512$  となった。

方位角モード指数  $n = -10 \sim 10$ 、動径モード指数  $p, p' = 0 \sim 10$  までの組み合わせによって、パラメトリック下方変換によって発生した光子対状態の約 93 % を表現できることが明らかになった。

## 5 結論

本研究の目的は、パラメトリック下方変換によって発生するもつれ合い光子対について、空間モード展開の形で明らかにすることであった。空間モード対振幅の式を変形して数値計算しやすい形にし、計算精度を適宜調整することで、方位角モード指数  $n = -10 \sim 10$ 、動径モード指数  $p, p' = 0 \sim 10$  の範囲から 449 個の空間モード対振幅を求めた。方位角モード指数を固定したとき、シグナル側とアイドラ側の動径モード指数が同じ光子の同時計数確率が高いことが明らかになった。また、方位角モード指数が低次のモードほど同時計数確率が高いことがわかった。本研究で設定したパラメター (波長  $\lambda_P = 405\text{nm}$ , 励起ビームウェスト  $w_P = 100\mu\text{m}$ , 結晶長  $L = 3\text{mm}$ ) では、計算を行った空間モード対で光子対の 93 % を表現できることがわかった。

## 参考文献

- [1] 川瀬大輔, 「光子の軌道角運動量もつれ合いの生成と制御に関する研究」, 北海道大学博士論文 (2009).
- [2] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, “HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS”, Dover Publications, Inc., p.376(1965)