

# 軌道角運動量もつれ合い状態の検出における高次モードの影響に関するシミュレーション

発表者：1413083 澤 優摩 指導教員：宮本 洋子

## 1 はじめに

本論文の目的はホログラムシフト法による軌道角運動量もつれ合い光子対の特性測定について、設定した実験パラメータに対する同時計数確率の振る舞いをシミュレーションし、ビジビリティおよび正弦曲線からのズレを評価して高次モードの影響を明らかにすることである。この量子もつれ合いの検出のためには、光子を異なる軌道角運動量固有状態の重ね合わせ状態で検出する機構が必要になる。そのための手段としてホログラムシフト法がある。もつれ合い状態を構成する二光子の両方にホログラムシフト法を適用する場合、位相ホログラム欠陥位置を方位角方向に走査したときの同時計数確率の変化は高次モードの影響のため正弦曲線から外れると期待される。この正弦曲線からのズレにより高次モードの影響を評価する。シミュレーションは早瀬 [1] による研究を土台として更に詳細な分析を行う。

## 2 軌道角運動量もつれ合い状態

シミュレーション後に行う実験の実験系を図 1 に示す。

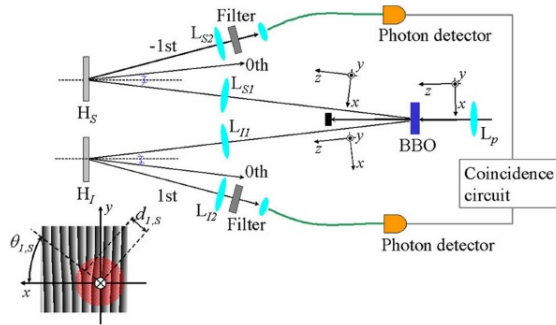


図 1: 同時計数確率実験セットアップ [2]

$L_p$  は励起ビームを BBO 結晶 ( -メタホウ酸バリウム結晶) に集光するために用いるレンズ,  $L_{S1}$  は出射ビームをホログラム  $H_S$  に集光するために用いるレンズ,  $L_{S2}$  はフィルターを通して回折光をシングルモードファイバーに入射するためのレンズである。添え字が  $I$  のものも同様である。励起ビームを位相整合条件のもとで BBO 結晶内に集光すると直進するビームと円錐状の光が得られる。選択した二方向のパラメトリック蛍光のうち片方をシグナル、もう一方をアイドラと呼び区別する。ホログラムで回折したビームをそれぞれシングルモードファイバに通し光検出器に入射して光子計数信号を得る。位相ホログラムは欠陥構造を持っており、欠陥には中心がある。欠陥中心はビームに垂直な面内で光軸から動径  $d_{I,S}$ , 方位角  $\theta_{I,S}$  の位置に設定する。このとき、観測する量子状態は次のように表せる。

$$|\psi_{I,S}^m\rangle \propto \int \exp\{i \times n \times m \times \arg(\rho \cos \varphi + d_{I,S} \cos \theta, \rho \sin \varphi + d_{I,S} \sin \theta)\} \\ \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_0} \exp(-\rho^2/w_0^2) a^\dagger(\mathbf{r})|0\rangle d\mathbf{r} \quad (1)$$

ここで,  $m$  はホログラムの欠陥次数,  $n$  は回折次数,  $w_0$  はホログラムの後に設置するシングルモードファイバを通過するガウスモードのスポットサイズ,  $a^\dagger(\mathbf{r})$  は位置  $\mathbf{r}$  における生成演算子である。励起ビームの 1 つの光子が BBO 結晶により変換されて出射される 2 つの光子をそれぞれシグナル光子とアイドラ光子と呼ぶ。入射光である励起ビームが  $LG_{00}$  モードであり, かつ結晶が薄いと仮定すると, 結晶面における二光子状態は以下のように表せる [2]。

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p,p'=0}^{\infty} C_{p,p'}^n | -n, p \rangle_S \otimes | n, p' \rangle_I \quad (2)$$

$n$  は LG モードの方位角モード指数,  $p, p'$  は動径方向モード指数である. モード関数  $\Phi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_I)$  を用いて, 位置空間表現として式 (2) は次のように表せる.

$$|\Psi\rangle_{\mathbf{r}} = \iint d\mathbf{r}_S d\mathbf{r}_I \Phi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_I) a_I^\dagger(\mathbf{r}_I) a_S^\dagger(\mathbf{r}_S) |0, 0\rangle \quad (3)$$

モード関数は

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_I) &= \iint d\mathbf{q}_S d\mathbf{q}_I \tilde{\Phi}(\mathbf{q}_S, \mathbf{q}_I) \exp(i\mathbf{q}_S \cdot \mathbf{r}_S) \exp(i\mathbf{q}_I \cdot \mathbf{r}_I) \\ &= N_r \exp(-|\mathbf{r}_S + \mathbf{r}_I/2|^2/w_P^2) \exp(-|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_I/2|^2/b^2) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで  $N_r$  は規格化定数であり,  $\mathbf{r}_{S,I}$  はビーム断面内方向の位置,  $w_P$  は励起ビームのスポットサイズである.  $b$  は励起ビームの波長  $k_P$  と有効結晶長  $L$  を用いて  $b = 1.42\sqrt{L/(4k_P)}$  である.

### 3 同時計数確率

式 (2) において低次モード ( $n = 0, 1$ ) のみを考慮すると, 同時計数確率は正弦曲線となる. 高次モードも含めると, 同時計数確率は正弦曲線からズレるため, このズレを計算することで高次モードの影響を評価する. シミュレーションにおいては式 (1) と式 (3) を用いて, アイドラ側とシグナル側の位相ホログラム  $H_I$  と  $H_S$  の欠陥位置の関数として, 次のように同時計数確率を表す.

$$\begin{aligned} P_m(d_I, \theta_I, d_S, \theta_S) &= \langle \psi_I^m(d_I, \theta_I) | \langle \psi_S^m(d_S, \theta_S) | \Psi \rangle_{\mathbf{r}} \rangle^2 \\ &\propto \left| \iint d\mathbf{r}_S d\mathbf{r}_I \Phi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_I) \exp(-\rho_S^2/w_0^2) \exp(-\rho_I^2/w_0^2) \right. \\ &\quad \exp[-i \times m \times \{\arg(\rho_I \cos \varphi_I + d_I \cos \theta_I, \rho_I \sin \varphi_I + d_I \sin \theta_I)\}] \\ &\quad \left. \exp[i \times m \times \{\arg(\rho_S \cos \varphi_S + d_S \cos \theta_S, \rho_S \sin \varphi_S + d_S \sin \theta_S)\}] \right|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$m$  は前述のとおりホログラムの欠陥次数である. 式 (5) はすべての高次モードの成分を含んだものである.

### 4 ビジビリティ

式 (2.16) をシミュレーションして得たデータを最大値で規格化したものを同時計数確率として用いる. この同時計数確率のコントラスト (最大値 1 と最小値との差) をここではビジビリティと呼ぶ. すなわち, 同時計数確率のビジビリティは  $V = 1 - P_{\min}$  と定義する.  $P_{\min}$  は  $P_m$  の  $\theta_S$  に関する最小値である. もつれ合い状態の確認に必要なベルの不等式の破れを示すためにはビジビリティは 0.82 以上必要である. またビジビリティが低ければ同時計数確率の変動を観測しにくくなるため, 高次モードの影響を評価するときには同時計数確率と正弦曲線との関数形としての差だけでなくビジビリティも考慮に入れる必要がある.

### 5 正弦曲線からのズレ

同時計数確率の最大値を 1 に, 最小値を  $-1$  に正規化した同時計数確率を  $P_{\text{norm}}$  とし, 低次モードのみを考慮した場合の同時計数確率を  $P_{\text{harmonic}}$  とすると,  $Y$  は次の式で表せる.

$$Y = P_{\text{harmonic}} - P_m \quad (6)$$

$$= (\cos \theta_S - P_{\text{norm}}) \cdot \frac{V}{2} \quad (7)$$

これを指標にして高次モードの影響を総合的に評価する.  $Y$  を  $\theta_S$  についての関数とみなして, その最大値を  $Y_{\max}$  とする. 本研究では  $Y_{\max}$  を  $w_P$  とホログラムの相対シフト量  $d/w_0$  の関数とみなして, その最大値与える引数としての  $w_P$  とシフト量  $d/w_0$  を探索する.

## 6 スケールを変化させた場合の $Y_{\max}$ の変化

数種類のスケールを設定して相対シフト量 0.6 における  $w_p$  に対する  $Y_{\max}$  の変化を調べた。スケールとは、シミュレーション中で長さを無次元量として記述するときその単位とする長さのことである。例えば本シミュレーションでは励起ビームの波長は 405nm であるが、プログラム上ではこれをスケール  $1\mu\text{m}$  で割り、 $405\text{nm}/1\mu\text{m} = 0.405$  を励起ビームの波長として扱っている。結晶長や各シフト距離についても同様である。シミュレーションは次の手順で行った。

1. 式 (5) を極座標形式で記述し、同時計数確率  $P_1$  を出力する関数を設定する
2. 実験パラメーターの値を設定する。  
ホログラム欠陥次数  $m = 1$ 。励起ビームの波長  $\lambda_p = 405\text{nm}$ 。結晶の長さ  $L = 3\text{mm}$ 。アイドラ/シグナル側ホログラムのシフト距離  $d_1 = d_S = d$ 。アイドラ側ホログラムのシフト方向  $\theta_1 = 0$ 。シグナル/アイドラビーム径  $w_0 = w_p/2$ 。相対シフト量  $d/w_0 = 0.6$ 。
3. スケールを設定し、シグナル側の動径  $\theta_S$  を設定し  $P_1$  を出力させる
4. 式 (7) によりビジビリティ  $V$  と正弦曲線からのズレ  $Y$  を計算する
5.  $Y$  から  $\theta_S$  に関する最大値  $Y_{\max}$  を計算し、 $Y_{\max}$  と  $w_p$  との関係をグラフで表示する

作成したグラフを図 2 に示す。

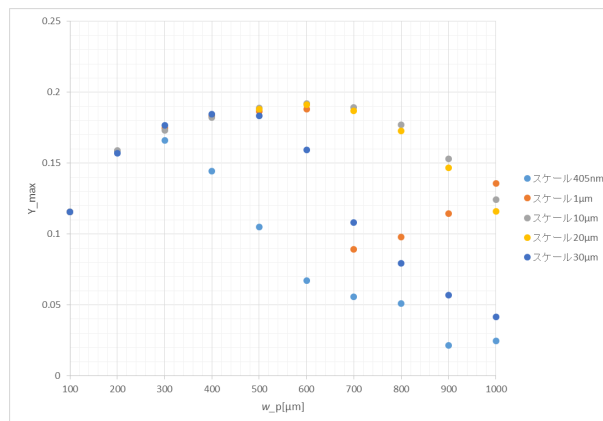


図 2: スケールを変化させた場合の  $w_p$  に対する  $Y_{\max}$ : 相対シフト量 0.6

図 2 より、 $w_p$  が  $100\mu\text{m}$  から  $300\mu\text{m}$  までは各スケール間にはほとんど違いは認められない。それ以降では、スケール  $1\mu\text{m}$  では  $Y_{\max}$  が不連続的に変化する。スケール  $406\text{nm}$  およびスケール  $30\mu\text{m}$  ではスケール  $10\mu\text{m}$  とスケール  $20\mu\text{m}$  より小さい  $w_p$  において  $Y_{\max}$  が最大値となり、そこから急激に減少している。スケール  $10\mu\text{m}$  とスケール  $20\mu\text{m}$  とではほとんど違いが見られず、調べた中では比較的ゆるやかに変化している。理想的には長さの単位であるスケールをどのように設定しても計算結果は変わらないはずであるが、図 2 を見ると、設定するスケールによって計算結果は大きく異なっている。シミュレーションの正当性を保証するためにはより詳しく調査する必要があるが、スケール  $10\mu\text{m}$  とスケール  $20\mu\text{m}$  の結果がほぼ一致したことから、 $10\mu\text{m}$  前後のスケールを用いることが比較的安全と考えられる。以後のシミュレーションはスケールを  $10\mu\text{m}$  として行った。

## 7 相対シフト量を変化した場合の $Y_{\max}$ の変化

シミュレーションは次の手順で行った。

1. 式 (5) を極座標形式で記述し、同時計数確率  $P_1$  を出力する関数を設定する
2. 実験パラメーターの値を次のように設定する

ホログラム欠陥次数  $m = 1$ 。励起ビームの波長  $\lambda_p = 405\text{nm}$ 。結晶の長さ  $L = 3\text{mm}$ 。アイドラ/シグナル側ホログラムのシフト距離  $d_1 = d_S = d$ 。アイドラ側ホログラムのシフト方向  $\theta_1 = 0$ 。シグナル/アイドラ検出ビーム径  $w_0 = w_p/2$ 。

3. スケールを  $10\mu\text{m}$  に設定し、相対シフト量を設定する
  4. シグナル側の動径  $\theta_S$  を設定し  $P_1$  を出力させる
  5. 式 (7) によりビジビリティ  $V$  と正弦曲線からのズレ  $Y$  を計算する
  6.  $Y$  から  $\theta_S$  に関する最大値  $Y_{\text{max}}$  を計算し、 $V$  と  $Y_{\text{max}}$  について、励起ビーム径  $w_P$  との関係をグラフで表示する
- 作成したグラフを図 3 および図 4 に示す。

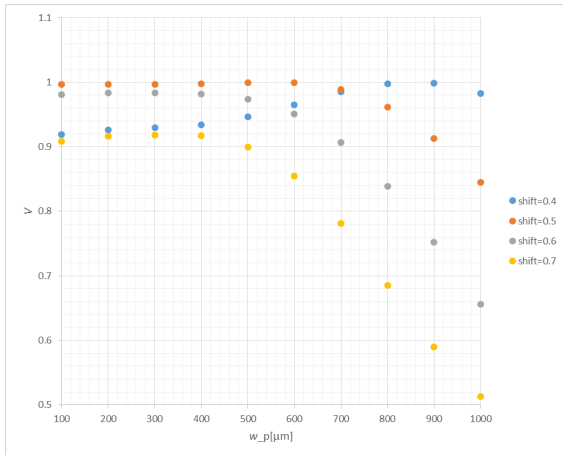


図 3:  $w_P$  に対する  $V$

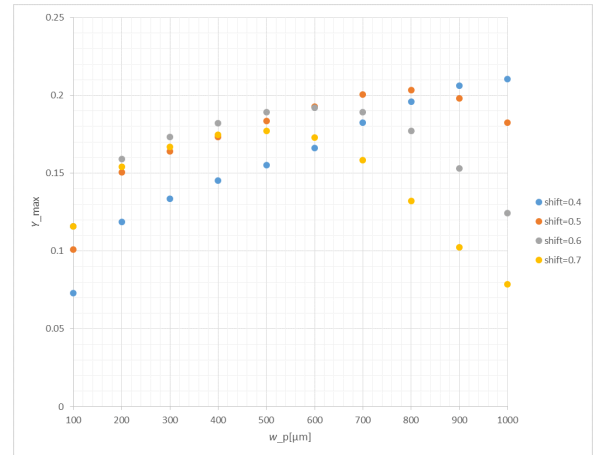


図 4:  $w_P$  に対する  $Y_{\text{max}}$

図 3 より、 $w_P$  が  $800\mu\text{m}$  までの範囲では相対シフト量 0.5, 0.6, 0.7 においては  $w_P$  が大きくなるほどビジビリティ  $V$  は小さくなり、一方でシフト量 0.4 においては  $w_P$  が大きくなるほど  $V$  は大きくなるのがわかる。実験に用いる予定の結晶は入射面に内接する円の半径が  $2500\mu\text{m}$  であり、入射する際にはビーム径の 3 倍程度までが結晶の半径に収まるようにしたい。なので、 $w_P$  は  $800\mu\text{m}$  程度以内に設定する。 $V$  は  $700\mu\text{m}$  の前後で最大値をとる相対シフト量が 0.5 から 0.4 に変わる。そのため、ビジビリティを重視する場合は設定する  $w_P$  によってシフト量を調節する必要があることがわかる。図 4 より、 $w_P$  が  $500\mu\text{m}$  までの範囲では相対シフト量が 0.6 の場合に  $Y_{\text{max}}$  が最大になり、 $w_P$  が  $600\mu\text{m}$  から  $800\mu\text{m}$  の範囲では相対シフト量が 0.5 の場合に最大、 $900\mu\text{m}$  から  $1000\mu\text{m}$  までは相対シフト量が 0.4 の時に最大となることが分かった。実際に用いる予定の結晶の長さを考慮すると  $w_P$  を  $800\mu\text{m}$ 、相対シフト量を 0.5 付近に設定することで  $Y_{\text{max}}$  を最大にすることができる。

## 8 まとめ

実際の実験で用いる結晶の入射面に適合する励起光のビーム径は最大  $800\mu\text{m}$  である。シミュレーションの結果、相対シフト量  $d/w_0$  を 0.5 に設定すると正弦曲線からのズレ  $Y_{\text{max}}$  を最大にすることができることが分かった。これはすなわち高次モードの影響が最も強く現れる条件である。より大きな入射面をもつ結晶を用いることで、より高次モードの影響が強く現れる可能性がある。今後は実際に上述のパラメータ付近で実験を行い、高次モードによる同時計数率への影響を評価する。ただし、以上の結果はスケールを  $10\mu\text{m}$  に設定した時の結果であり、ほかのスケールに設定した場合には変わりうる。そのため、スケールによってシミュレーション結果が変わる原因を探り、スケールによって変化しにくいプログラムを作成することを目指す。

## 参考文献

- [1] 早瀬茂法,「ホログラムシフト法による軌道角運動量もつれ合い光子対の同時計数確率のシミュレーション」, 電気通信大学学士論文, (2017)
- [2] 川瀬大輔,「光子の軌道角運動量もつれ合いの生成と制御に関する研究」, 北海道大学博士論文, (2009)
- [3] 尾崎雄亮,「パラメトリック蛍光光子対の軌道角運動量の連れ合い状態の検出」, 電気通信大学修士論文, (2008)